## Пахоменко Ирина Александровна.

## Ретроспективный анализ методической литературы по проблемам изучения метрических соотношений в круге и обучения решению задач данной темы

Данная статья содержит анализ основных методических мыслей отечественного образования в области геометрии и, в частности, в вопросах изучения метрических соотношений в круге, в различные периоды XX века. Отдельное внимание уделено вопросу понимания термина «метрические соотношения», выделен список метрических соотношений в круге, изучаемых в учебнике Н.А. Извольского 1924 года. Также представлены основные выводы проведенного анализа литературы.

Мы привыкли думать, что геометрия – древнейшая наука и про ее преподавание всё известно. Однако это не так. Прежде всего, следует сказать, что методологическая основа геометрии сформировалась сравнительно недавно, в конце XIX – начале XX века. В XIX веке в Российской империи сложилась система среднего образования, в рамках которой геометрия была самостоятельным учебным предметом, за исключением начальных учебных заведений [2].

Ушедший век много привнес в теорию и методику обучения и воспитания учащихся в процессе их математического образования. В целом первое десятилетие 20 века ознаменовано появлением для школы большого числа учебных пособий. Среди них, например, учебники Николая Александровича Извольского [5], предназначенные для трудовой школы. Советская школьная система оформилась к 1922 году: начальная школа (4 года обучения), основная семилетняя общеобразовательная школа и старшая ступень общеобразовательной школы (всего 9–10 лет учёбы). Изучение геометрии предполагалось начинать лишь на 3 году обучения основной семилетней школы [3], поскольку Н.А. Извольский выступал противником опытного пропедевтического курса. Так называемый «Начальный курс» геометрии был рассчитан на три года.

Что касается темы «Круг», то автор предлагает изучать ее с разных аспектов на каждом году обучения геометрии. Так, уже после первой главы учебника [5] «Отрезки и углы», происходит знакомство с понятием круг. Примечательно, что в данном случае автор под словом «круг» подразумевает как собственно круг, так и окружность: «…если вращать на плоскости отрезок ОА около одного из своих концов, например, около точки О, то другой конец А опишет замкнутую линию, называемую **кругом или окружностью.** Эта линия ограничивает определенную часть плоскости, называемую площадью круга или окружности. Точка О, около которой вращается отрезок, называется центром этого круга» [3, с.18].

В данной главе, помимо определения круга, даны также определения центра, диаметра, радиуса, центрального угла, дуги, хорды круга.

Следует, однако, уделить внимание одному важному аспекту в понимании изучаемой темы. Что же следует понимать под словосочетанием «метрические соотношения»? Очевидно, что речь идет о таких соотношениях, которые относятся к метрике. Согласно большому энциклопедическому словарю (2000г.), метрика – математический термин, обозначающий формулу или правило для определения расстояния между любыми двумя точками (элементами) данного пространства (множества). Иными словами, это функция, определяющая расстояния в метрическом пространстве. Итак, метрика является обобщением понятия расстояния на декартовой плоскости . Предметом нашего рассмотрения будут такие соотношения в круге или окружности, которые относятся к каким-либо измерениям в круге. Что касается соотношения, например, длины окружности и радиуса круга, то его мы будем также рассматривать в качестве метрических, поскольку в современных школьных учебниках длина окружности рассматривается в аспекте предела периметров вписанных в круг многоугольников.

Какие же метрические соотношения в круге и другие свойства круга на данном этапе обучения предоставляет автор, покажем в таблице (таблица 1).

*Таблица 1*

**Метрические соотношения в круге главы 1 учебника Извольского Н.**

|  |  |
| --- | --- |
| Метрические соотношения в круге | Симметрия круга относительно центра круга |
| Равенство дуг и хорд при равных центральных углах |
| Симметрия относительно диаметра круга(окружности) |

Предлагается решать задачи следующих типов:

1. Нахождение равноудаленной от центров двух пересекающихся окружностей точки.
2. Построение угла, равного данному.
3. Построение суммы и разности двух данных углов.

Далее автор возвращается к кругу в 12 главе после введения определения понятия «многоугольник». Николай Александрович рассматривает окружность как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон. Остается невыясненным, что значит бесконечно большое число сторон, и как познакомить с ним учащихся. Сам он пишет в своей «Методике геометрии» об этой проблеме так: «Нет, конечно, надобности педантично избегать слова «предел»… Если позволяет время, то этот вопрос можно рассматривать более подробно:1) можно установить, что выпрямленный периметр каждого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного; 2) можно установить возможность построения двух правильных многоугольников, вписанного и описанного, разность периметров которых меньше любого наперёд заданного отрезка; 3) можно, откладывая ряд периметров и вписанных и описанных многоугольников на прямой от определенной точки идти к заключению, что длину круга следует считать как бы границей между множеством отрезков, выражающих выпрямленные периметры вписанных многоугольников, и множеством отрезков, выражающих периметры описанных многоугольников. Такой граничный отрезок является возможным рассматривать как выпрямленный периметр правильного вписанного или описанного многоугольника с бесконечно большим числом сторон» [3].

 На этом этапе изучения темы выясняются новые соотношения в круге (таблица 2):

*Таблица 2*

**Метрические соотношения в круге главы 12 учебника Н.А. Извольского**

|  |  |
| --- | --- |
| Метрические соотношения в круге | в круге или в равных кругах равные дуги стягиваются равными хордами |
| диаметр, перпендикулярный к хорде, делит пополам и хорду, и стягиваемую ею дугу  |
| равенство дуг, заключенных между параллельными хордами  |
| уменьшение хорды с удалением ее от центра |
| равноудаленность от центра круга равных хорд |

Следующие главы учебника, относящиеся к разделу «Чистая геометрия» добавляют новые знания о круге и окружности (таблица3):

*Таблица 3.*

**Метрические соотношения в круге в главах 13–15 учебника Н.А. Извольского**

|  |  |
| --- | --- |
| **Формулировка** | **Раздел учебника** |
| вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу | Гл.13 |
| угол, составленный хордой и касательной, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную внутри первого угла  | Гл.13 |
| вписанный угол, опирающийся на диаметр– прямой | Гл.13 |
| во всяком вписанном в круг выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна 2D | Гл.13 |
| **Формулировка** | **Раздел учебника** |
| через точку, взятую вне круга, можно построить две касательных к этому кругу, и отрезки их от данной точки до точек касания равны между собой | Гл.13 |
| радиус круга Эйлера (или круга девяти точек) вдвое меньше радиуса круга описанного около данного треугольника | Гл.14 |
| во всякий правильный многоугольник можно вписать круг | Гл.15 |

Следующая часть учебника – «Измерительная геометрия». Здесь автор снова обращается к кругу(или окружности) (таблица4):

*Таблица 4.*

 **Метрические соотношения в круге в части 2 учебника Н.А. Извольского**

|  |  |
| --- | --- |
| **Формулировка метрического соотношения** | **Раздел учебника** |
| отношение двух центральных углов равно отношению соответствующих им дуг | Гл. 19 |
| в центральном угле столько угловых единиц, сколько таких же дуговых единиц в соответствующей этому углу дуге | Гл. 19 |
| вписанный угол и угол, составленный хордой и касательной, измеряется половиной дуги, заключенной внутри этих углов | Гл. 19 |
| угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность, измеряется половиной суммы дуг, заключенных между сторонами угла и их продолжениями | Гл. 19 |
| отношение длины круга к его диаметру равно постоянному числу | Гл.27 |
| площадь сектора равна половине произведения длины его дуги на радиус | Гл.27 |

Интересно остановиться на том, как Н.А. Извольский предлагает работу учащихся с числом π. В своей «Методике геометрии» он пишет: «Полагаю, что совершенно излишняя трата времени будет иметь место в том случае, если учащихся привлекают к вычислению числа π с большей точностью. Достаточен тот результат, который получается от вычисления с точностью до единицы и от сознания, что можно при помощи правильных вписанных и описанных многоугольников вычислить число π с большей точностью. Для чего лишь придется проделать целый ряд (иногда утомительных) вычислений» [3].

Что касается решения задач на данном этапе, то, по мнению Николая Александровича, важной будет система упражнений, с помощью которой ученики смогут ответить на вопрос, во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличить в 2 или более раз [3].

Проанализировав подходы Н.А. Извольского к организации обучению геометрии в общеобразовательной школе и, в частности, к логике и последовательности изучения метрических соотношений в круге в содержании соответствующего учебника, можно сделать несколько обобщений:

* Изучение метрических соотношений в круге происходит на всех этапах обучения.
* Отсутствие пропедевтического курса.
* Большое внимание уделяется практической стороне вопроса. Подробно описаны методы построения, большая часть задач носит практических характер.
* Изучение рассматриваемой темы идет по пути, скорее, по которому шло накопление геометрических знаний, а не по пути, на который выступают желающие привести эти знания в формально-логическую систему.
* Существование трудностей в изложении знаний о круге, связанные с недостаточной осведомленностью учащихся с теоретическим материалом на данном этапе обучения (например, необходимость преждевременного введения понятия «предел» при изучении длины окружности).
* Главенствующее место при изучении вопроса занимает, скорее, интуиция, и лишь постепенно все большие права как бы захватывает логика.

На следующем витке школьного геометрического образования 50 – 60 годов идея «порвать с традицией, со старой схемой изложения в виде теоремы, доказательства, следствия…»[6] трансформировалась в лозунг «Евклид должен уйти». Однако это вовсе не означало полный отказ от традиции, подразумевалась лишь возможность сосуществования традиционных и альтернативных методов обоснования суждений. Кроме того, в середине пятидесятых годов в мире началось движение за введение в школьную математику понятий множества, структуры, элементов математической логики. Предусматривалось усиление связи преподавания с жизнью[2].

Что касается методики изучения темы «Метрические соотношения в круге», то стоит отметить сходство с предыдущей рассмотренной методикой. Однако, например, в учебнике Н.А.Глаголева и А.А Глаголева по элементарной геометрии (1958) уже четко разделяются понятия круга и окружности. Есть и другие отличия. Например, при изучении соотношения длины окружности и диаметра, большее внимание уделяется как практической стороне вопроса, так и строгому доказательству формулы длины окружности. В.Г. Чичигин в своей «Методике преподавания геометрии» писал: «Учащимся предлагается непосредственное измерение длины диаметра при помощи таких инструментов как кронциркуль, нутромер и мерная линейка с подразделениями на сантиметры и миллиметры, …замена вычислений использованием готовых таблиц,… логарифмические линейки для определения длины окружности…»[1]. Ставилась цель – убедить учащихся в огромных преимуществах табличных и инструментальных вычислений. «Площади частей круга, сегмента и сектора, учащиеся выводят самостоятельно (в классе или дома)»[1].

Таким образом, можно заметить, что развитие методики преподавания геометрии и, в частности, изучения метрических соотношений в круге, в середине прошлого века шло по пути:

* от интуиции к строгой логике;
* усиления роли инструментальных вычислений;
* ослабление роли аксиоматизации;
* ослабление внимания исследователей к проблеме образного мышления.

Так называемый «колмогоровский период» (60-70 гг. 20 века), напротив, использовал аксиоматический подход, усиливалась логическая составляющая курса. Программа предусматривала уже в 4 классе изучение основных геометрических понятий, в пятом – геометрических построений, в шестом – равенства плоских фигур и так далее [2].

Дальнейшее развитие методической мысли привело к появлению новых подходов. Борьба за появление пропедевтических курсов геометрии в 70-е годы завершилась включением в курс математики 4–5 (5–6) классов большого объема геометрических фактов в рамках «геометрии без доказательств», что создало предпосылки к появлению в последующем самостоятельных курсов геометрии для 5–6 (1–6) классов [2]. Меняются и подходы к способам изучения метрических свойств окружности. И хотя они все еще традиционно связываются с изучением правильных многоугольников, вписанных в окружность или описанных около нее, но теперь многие соотношения в круге уже не рассматриваются в теоретической части курса. Они отнесены к разряду задач. [4].

На современном витке развития отечественного математического школьного образования появилось множество учебников для организации обучения геометрическому материалу в 1–6 классах. Этому способствовали различные исследования в области детской психологии. Одна из целей обучения геометрии на этом этапе – подготовка к сознательному усвоению курса геометрии в 7–11 классах и к изучению смежных дисциплин. В этот период вводятся термины «круг» и «окружность» «…в системе представлений – предпонятий на основе умения отличать род и видовые отличия геометрической фигуры»[7].

# Литература

1. В.Г. Чичигин «Методика преподавания геометрии. Планиметрия». Пособие для учителей средней школы. Изд-во: Учпедгиз, 1959.
2. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. Методика обучения геометрии. Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений Под ред.
3. Извольский Н.А. «Методика геометрии». Петербург. Изд-во: Брокгауз – Ефрон, 1924.
4. Мишин В.И. (сост.). Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб.пособие для студентов пед.инс-тов по физ.-мат.спец./ Блох А. Я., Гусев В. А., Дорофеев Г. В. и др. Сост. В.И.Мишин. М.: Просвещение, 1987, 416с.
5. Н.А. Извольский «Геометрия на плоскости (планиметрия)». Учебное пособие для трудовой школы. Изд-во: Ленинград.
6. Программа–минимум по математике для школ 2 ступени. Екатеринбург: изд-во Екатеринбургского Губоно, 1923.
7. Стефановa Н.Л., Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Курс лекций. М.: Дрофа, 2005. — 416 с.