

**НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В 7-11 КЛАССАХ**

Матиев.А.С
ГБОУ СОШ № 5
г. Малгобека

Умение решать нестандартные задачи – важнейшая составляющая математического развития учащихся.

Желательно, чтобы к окончанию школы у детей был накоплен некоторый опыт решения таких задач.

Предлагаемые задачи не являются задачами повышенной трудности. Для их решения не требуется знаний, выходящих за пределы программы общеобразовательной школы, не являются они и особенно трудными (более того, многие задачи предназначены для устного решения).

Однако некоторые из них имеют нестандартные формулировки, другие требуют для своего решения преодоления сочетания трудностей.

Задачи могут быть использованы как для фронтальной работы, так и в качестве домашних заданий, а также при организации различных форм внеклассной работы.

Структура задач.

7 класс.

1. Докажите, что сумма двух нечетных чисел – четное число.
2. При каком значении a корнем уравнения $ax = 8$ является число 5.
3. Решите уравнение $|x| - 2 = 7$.
4. Известно, что график функции $y = kx + b$ проходит через точку $A(2;3)$, угловой коэффициент прямой равен 2. Запишите формулу, задающую эту функцию.
5. Докажите, что $12^{13} - 12^{12} + 12^{11}$ делится на 7 и на 19.
6. Решите уравнение $3x - 2 = ax$. Выясните, при каких значениях a это уравнение имеет корни, и при каких не имеет корней.
7. При каких значениях a уравнение $\frac{x-1}{x} = a$ не имеет корней?
8. Докажите, что выражение $64^3 - 8^5 - 4^7$ кратно 13.
9. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если длину каждой стороны увеличить на 20%?
10. Некоторый товар сначала подорожал на 10%, а потом подешевел на 10%. На сколько процентов изменилась цена этого товара?
11. График функции $y = kx + b$ пересекает ось Оу в точке $(0;7)$ и проходит через точку $M(-2;1)$. Найдите коэффициент k и b .
12. Найдите все целые значения a , при которых корень уравнения $ax = 4$, является целым числом.
13. При каком значении m уравнение $mx = 7 + 2x$ не имеет корней?
14. Решите уравнение: $|3x - 1| = 4$.
15. Постройте графики функций:
 - а) $y = x - \frac{|x|}{x}$,
 - б) $y = x - |x|$.
16. При каких значениях a и b прямая $y = ax + b$ проходит через точки $M(1;5)$ и $N(-5;-3)$?
17. Для каждого значения b решите уравнение:
 $(b^2 - 9)x = b + 3$.
18. При каких значениях a уравнение $ax = 8$ имеет отрицательный корень?

8 класс.

1. Докажите, что
 $\sqrt{8\sqrt{3} + 19} = \sqrt{3} + 4$.
2. При каких значениях k уравнение $kx^2 - 8x + 1 = 0$ имеет два корня?
3. При каких значениях p квадратный трехчлен $(p - 4)x^2 + 4x - 3$ имеет корни?
4. Решите неравенство:
 $|x - 4| \leq 1$.

5. Сумма двух последовательных нечетных чисел меньше 64. Найдите наибольшее нечетное натуральное число, которое может входить в состав такой “пары”.
6. При каких значениях a справедливо равенство $\sqrt{a^2 + 10a + 25} = -a - 5$.
7. Найдите все значения b , при которых уравнение $bx^2 + 6x + b = 0$ не имеет корней.
8. Вычислите:
 - а) $\sqrt{(7\frac{1}{3})^2 + 2 * 7\frac{1}{3} * 8\frac{2}{3} + (8\frac{2}{3})^2}$,
 - б) $\sqrt{85^2 - 84^2}$.
9. Постройте график функции:
 - а) $y = 2 - x$;
 - б) $y = (\sqrt{2 - x})^2$;
 - в) $y = \sqrt{(2 - x)^2}$.
10. Для всякого a решите уравнение:
 $x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$.
11. При каком значении a уравнение $\frac{x^2 - x - 6}{x - a} = 0$ имеет один корень?
12. При каком значении p один из корней уравнения $x^2 - px + 7 = 0$ равен единице? Найдите второй корень.
13. За два года население городка увеличилось на 44%. На сколько процентов увеличивается население городка ежегодно?
14. Зная, что $\frac{a}{b} = 10$, найдите значение дроби:
 - а) $\frac{a + b}{a}$;
 - б) $\frac{2a - 3b}{b}$;
 - в) $\frac{(a - b)^2}{ab}$.
15. Постройте график функции:
 - а) $y = \frac{64}{(x - 4)^2 - (x + 4)^2}$;
 - б) $y = \frac{8}{/x/}$.
16. Решите уравнения:
 - а) $\frac{x^3}{/x/} + x + 3 = 0$;
 - б) $3x^2 + \frac{x^2}{/x/} - 4 = 0$.
17. При каких значениях a :
 - а) уравнение $5x - 2 = a$ имеет положительный корень;
 - б) уравнение $4 + 3x = a - 5$ имеет отрицательный корень?
18. Решите уравнения:

- а) $|6 - 2x| = 8$;
 б) $|b + 4| = b + 4$;
 в) $\frac{|x - 1|}{3} = 5$;
 г) $|x| - 2x = 3$;
 д) $|x - 1| + 5x = 5$;
 е) $|6 - x| = |2 + x|$.

19. Решите неравенства:

- а) $|6x - 1| < 2$;
 б) $|3 + 5x| > 4$;
 в) $|2x| > x + 3$;
 г) $|x - 2| + x > 4$;
 д) $3 < |x| < 5$.

20. Задайте формулой линейную функцию, графиком которой служит прямая, проходящая через точку $M(\frac{1}{3}; 10)$ и параллельная прямой $y = 15x - 23$.

21. Найдите коэффициенты p и q у функции $y = x^2 + px + q$, зная, что её график проходит через точку $A(2; -5)$ и $B(-1; 16)$.

9 класс.

1. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}}$;
 б) $y = \sqrt{x^2 - 14x + 40}$;
 в) $y = \frac{9}{\sqrt{8x - 2x^2}}$.

2. Постройте графики функции:

- а) $y = x^2 - |x| + 1$;
 б) $y = |x^2 + 4x + 3|$.

3. При каких значениях k графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + k$ а) не имеют общих точек; б) имеют одну общую точку; в) имеют две общие точки; г) имеют более двух общих точек?

4. Найдите наименьшее расстояние между линиями $y = x^2$ и $y = -2$.

5. При каких значениях a уравнение $4x^2 + ax + a - 4 = 0$ имеет два различных корня?

6. Для каждого b решите систему:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x < b. \end{cases}$$

7. При каких значениях b определено выражение $\sqrt{81 - b^2} + \frac{1}{\sqrt{(b - 1)(b + 4)}}$?

8. Решите уравнения:

- а) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) = 3$;

б) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$.

9. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $(1;5)$?

10. Решите уравнения:

а) $3 + 7 + 11 + \dots + x = 289$;

б) $8 + 5 + 2 + \dots + x = 270$.

11. При каких значениях k уравнение $5x^2 + 2kx + 5 = 0$ имеет два равных отрицательных корня.

12. Парабола $y = (a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6$ расположена выше оси Ox при каких значениях a ?

13. Решите неравенство:

$|x^2 - 5| < 4$.

14. Составьте уравнение, корни которого обратны корням уравнения $15x^2 - 7x - 24 = 0$.

15. При каких значениях a парабола $y = 3ax^2 - 15x + 10$ не имеет общих точек с осью Ox ?

16. В геометрической прогрессии, все члены которой отрицательны, сумма пятого и шестого членов равна -648 , а четвертый член этой прогрессии равен -54 .
Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

10 класс.

1. Найдите наибольшее значение выражения $3 \cos x + 5 \sin x$.

2. Найдите наименьшее значение выражения $4 \cos x + 7 \sin x$.

3. Решите уравнение $\sin^2 x - \cos 4x = b$, если одно из его решений $\frac{\pi}{6}$.

4. При каких значениях b уравнение $\cos^2 x - (3 + 2b) \cos x + 6b = 0$ не имеет корней?

5. При каких значениях p уравнение $\cos x = p$ имеет ровно три корня на промежутке $[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$?

6. При каких значениях m функция $y = x^3 - 3m^2x + 1$ имеет ровно одну точку экстремума на отрезке $[-2; 7]$?

7. Пусть $f(x) = x^2 - 7x + a$. При каких значениях b ($b > -3$) $\max_{[-3; b]} f(x) = 9$?

8. Начертите график функции:

а) $y = 2^{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x} - 4$;

б) $y = x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - 1$.

9. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{3\sqrt{-x} + 2\sqrt{x+4}}{\sin x}$;

б) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{3 - 2 \sin x}}$;

в) $y = \sqrt{\cos 3x + \cos x}$;

$$\text{г)} y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

10. Найдите область значений функции:

$$\text{а)} y = \frac{x-1}{x^2+1};$$

$$\text{б)} y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

11. Постройте график функции:

$$\text{а)} y = \frac{x-1}{x-3} (x^2-9);$$

$$\text{б)} 3x - x^3.$$

12. При каком значении a а) уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней; б) уравнение $x^4 - 2x^2 - 3 = a$ имеет три корня?

13. Решите неравенство:

$$\text{а)} \sqrt{x+2} > 2x-2;$$

$$\text{б)} \sqrt{x-1} < \frac{1}{2}x.$$

14. Укажите число решений уравнения в зависимости от параметра a :

$$\text{а)} \left/ \frac{2x-1}{x+1} \right/ = a;$$

$$\text{б)} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{a-1} = 2 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

в) при каких $a \neq -3$ уравнение $2 \sin 2x = \frac{a-1}{a+3}$ не имеет корней?

15. При каких b касательная, проведенная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 , проходит через точку N :

$$\text{а)} f(x) = bx^3 - x^2 + 3, x_0 = 1, N(2; 8);$$

$$\text{б)} f(x) = bx^3 + 2x + 4, x_0 = -1, N(-2; -8).$$

16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

$$\text{а)} f(x) = 2 \sin 2x - \cos 4x \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right];$$

$$\text{б)} f(x) = 3 \cos 4x + 6 \sin 2x \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

17. Укажите количество корней уравнения $3 \sin^2 x + 8 \cos^2 x = 2 + \frac{5}{2} \sin 2x$ принадлежащих отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{3}]$.

18. Найдите результат вычисления выражения $\sin(\operatorname{arctg}(-\frac{3}{5}) - \frac{5}{2}\pi)$?

19. Найдите сумму решений неравенства:

$$\frac{7x+8}{(x^2-2x+1)(x^2-3x)} + \frac{1}{x^2-4x+3} \leq 0.$$

20. Определите промежутки возрастания функции $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

11 класс.

1. Найдите все такие a , что $\int_{-1}^a 2^x dx < 8$.
2. Решите неравенства:
 - а) $\sqrt{x-1} < 2$;
 - б) $\sqrt{x-1} > -3$;
 - в) $\sqrt{x-1} > \sqrt{4-x}$.
3. При каких значениях a уравнение $25^x - (a+1)5^x + 3a - 6 = 0$ имеет ровно один корень?
4. Найдите все такие t , что $9^t + 5 \cdot 3^{2t} > 4^t + 3 \cdot 2^{2t}$.
5. Для каждого a решите уравнение:
 $\log_4(3x-2) = \log_4(2x-a)$.
6. При каких значениях a первообразная $F(x)$ функции $f(x) = x^2 - 2x + a$ возрастает на множестве действительных чисел?
7. При каких a уравнение $2 \sin 3x = a$ не имеет решений?
8. При каких значениях a функция $y = 2e^x + ax - 3$ не имеет критических точек?
9. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4 - \frac{9}{x+1} + \frac{1}{x-3}}$.
10. Найдите все решения уравнения $\cos x - \frac{1}{4} = 8 \cos^2 \frac{x}{2} - 5$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.
11. Решите неравенство:
 $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$.
12. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = \sqrt{4x-3}$, которые проходят через точку $A(2;3)$.
13. Для каждого a решите уравнение:
 $\sqrt{x^2 + 2x + a} = x + 1$.
14. Решите уравнение:
 - а) $\sin 3x \sqrt{4-x^2} = 0$;
 - б) $(\cos 2x - 1) \sqrt{9-x^2} = 0$.
15. Решите неравенства:
 - а) $\log_{x-3}(x-1) < 2$;
 - б) $\log_x(2x-3) > 1$.
16. Найдите область определения:
 - а) $y = \log_2(\sin 3x - \sin x)$;
 - б) $y = \sqrt{x^4 - 16} - \log_4(2-x)$.
17. При каком значении a а) уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней; б) уравнение $x^4 - 2x^2 - 3 = a$ имеет три корня?
18. Укажите число решений уравнения в зависимости от параметра a :
 - а) $\frac{x^2 - 5/x + 4}{a-2} = 1$;
 - б) $|x| - |x+1| = a$.
19. Решите неравенство:
 - а) $\frac{\log_{0.5}(x+3)}{x} \leq 0$;

б) $\frac{\log_{0,4}(x-2)}{x-6} \leq 0.$

20. Решите уравнение:

а) $5^{1/x+1} = (0,2)^{-x-1};$

б) $2^{1/x-1} = 0,5^{1-x}.$

21. Решите неравенство:

$\lg^2 x - \lg x^2 > 3.$

22. Что больше:

$\log_2 9^2 * \log_9 28$ или $\log_2 16\sqrt{8}?$

23. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 = a$ при $-4 < a < 0$?